

1. Programme des Questions de cours avec énoncé précis, et démonstration associée.

- Les thèmes des questions de cours ne sont pas tous au programme des exercices non préparés.
- Pour tout $i \in [2, 4]$, un étudiant qui choisit une priorité i peut aussi être interrogé, pour tout $k \in [1, i - 1]$ sur une priorité k .

— P1 Déterminer l'ensemble des réels x tels que $3x^4 = 5x^2 + 2$.

— P1 Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$.

— P1 Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

— P1 Calculer $\sum_{k=0}^n k =$

— P1 Calculer $\sum_{k=0}^n k^2 =$

— P4 Démontrer par récurrence simple la propriété de récurrence forte.

— P4 Démontrer par récurrence forte que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

— P3 Démontrer par récurrence simple que pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout $b \in \mathbb{N}^*$, il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times [0, b - 1]$ tel que $a = bq + r$ (**Unicité non traitée à ce stade**).

— P2 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Démontrer par récurrence double qu'il existe une unique suite $U \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $U_0 = c$, $U_1 = d$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$.

— P1 Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z_1 \neq z_2$. On pose $a = z_1 + z_2$ et $b = -z_1 z_2$.

Soit U une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$. Montrer que $(U_{n+1} - z_1 U_n)$ est géométrique, en déduire qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$.

— P2 Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. On pose $a = 2z_0$ et $b = -z_0^2$. Soit U une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (\lambda + \mu n)z_0^n$.

— P1 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$ et soit $U \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = aU_n + b$. Exprimer U_n en fonction de n et U_0 . Que peut-on dire dans le cas $a = 1$?

— P3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

— P1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in [0, n - 1]$, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ vérifie la relation de Pascal.

— P2 Soit A un anneau et soit $a \in A$. Montrer par récurrence que, pour tout $(n, m) \in A^2$, $a^{n+m} = a^n a^m$.

— P2 Soit A un anneau et soit $a \in A$. Montrer par récurrence que, pour tout $(n, m) \in A^2$, $a^{nm} = (a^n)^m$.

— P1 Déterminer l'expression de la suite U telle que $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.

— P4 Montrer que la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^2$ telle que, pour tout $((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{N}^2)^2$, $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si et seulement si $a+d = b+c$ est une relation d'équivalence.

— P4 Montrer que l'ensemble des classes d'équivalence relativement à une même relation d'équivalence sur un ensemble E forment une partition de E .

— P3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la relation $\mathcal{R}_n$ sur $\mathbb{Z}$ telle que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$,

$$a\mathcal{R}_n b \iff a \equiv b[n]$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

— P3 Montrer que : si une l.c.i admet un élément neutre alors ce dernier est unique

— P3 Montrer que : si un élément est symétrisable pour une l.c.i associative alors cet élément admet un unique symétrique.

— P3 On considère $*$ une l.c.i associative sur un ensemble E , $x \in E$ et $y \in E$ symétrisables, montrer que $x * y$ est symétrisable et indiquer son symétrique.

— P3 Soit $f \in E^E$. Montrer que f est bijective si et seulement s'il existe $g \in E^E$ tel que $f \circ g = g \circ f = Id_E$ (**injectivité, surjectivité hors programme à ce stade**)

— P2 Justifier que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

— P2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

— P2 Justifier que $(\{-1; 1\}, +)$ n'est pas un groupe.

— P2 Justifier que $(\{-1; 1\}, \times)$ est un groupe abélien.

— P2 Montrer que l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ munit de la multiplication matricielle est un groupe abélien.

— P3 Montrer que l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}_+$ munit de la loi de composition $\circ$ est un groupe non abélien.

— P2 Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau intègre commutatif.

— P2 Montrer que l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$ munit de l'addition et de la multiplication matricielle est un anneau qui n'est ni intègre, ni commutatif. (On admet le distributivité et l'associativité pour cette question mais c'est deux propriétés doivent être énoncées)

— P3 Propriété des sommes télescopiques

— P1 Déterminer l'ensemble des suites V à valeurs réelles telles que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 2V_n + 3n + 1$.

— P3 Soit $(U, V) \in (A^{\mathbb{N}})^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in A^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^n (\lambda U_k + \mu V_k) =$$

— P3 Soit A un anneau et soit $(a, b) \in A^2$ tel que a et b commutent. Montrer que $(a+b)^n =$

— P2 Soit A un anneau et soit $(a, b) \in A^2$ tel que a et b commutent. $a^n - b^n =$

— P1 Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^n q^k =$

2. Programme des exercices

a. Factorisation d'un polynôme de degré 3 à coefficients réels dont on connaît une racine, (**Nombres complexes hors programme**).

b. Équations polynomiales avec changement de variable éventuelle (trigonométrie hors programme à ce stade)

c. Démonstrations par récurrence simple uniquement (récurrences doubles et fortes hors programme à ce stade dans les exercices).

d. Calcul avec les coefficients binômiaux, résolution d'équation dans $\mathbb{N}$ (**sans arithmétique : arithmétique hors programme**)

e. $\sum_{k=0}^n k = \dots, \sum_{k=0}^n q^k = \dots, \sum_{k=0}^n 1 = \dots, \sum_{k=0}^n k^2 = \dots, a^n - b^n = \dots (a+b)^n =$

f. Détermination de l'expression d'une suite arithmético-géométrique.

g. Montrer qu'une suite est majorée ou minorée, montrer qu'une suite est croissante ou décroissante. **Les limites sont hors programme cette semaine.**

h. Détermination de l'expression d'une suite définie par récurrence avec changement de suite éventuelle.

i. Sommes télescopiques, manipulation de l'opérateur $\sum_{k=n_0}^n$ (changement d'indice hors programme)